

## 7. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY Z AUTOMATIZACE

### 7.1. Karnaughovy mapy

#### 7.1.1. Sestavení Karnaughovy mapy

Karnaughovu mapu můžeme sestavit dvojím způsobem: buď z pravdivostní tabulky, nebo přímo z algebraického výrazu. Oba způsoby si znázorníme na příkladě.

#### Příklad 1:

Sestavte Karnaughovu mapu k funkci tří proměnných (a, b, c), dané následující pravdivostní tabulkou (tab. 1).

s	a	b	c	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

tab. 1

		a	
		1	
		1	
		1	
b	1	1	c

obr. 62

Počet stavů vstupních proměnných je

$$s = 2^n$$

kde n - počet vstupních proměnných (a, b, c).

po dosazení je

$$s = 2^3 = 8$$

Protože počet stavů s je roven počtu řádků pravdivostní tabulky a současně počtu políček Karnaughovy mapy, bude mít mapa, sestavená k zadané logické funkci, 8 políček, uspořádaných do obdélníku (lichý počet vstupních proměnných). Každému políčku odpovídá hodnota logické funkce pro určitý stavový index (tedy pro různou kombinaci vstupních proměnných a, b, c). Karnaughova mapa pro tento případ je znázorněna na obr. 62.

Poznámka: Do mapy se zapisují pouze jedničky.

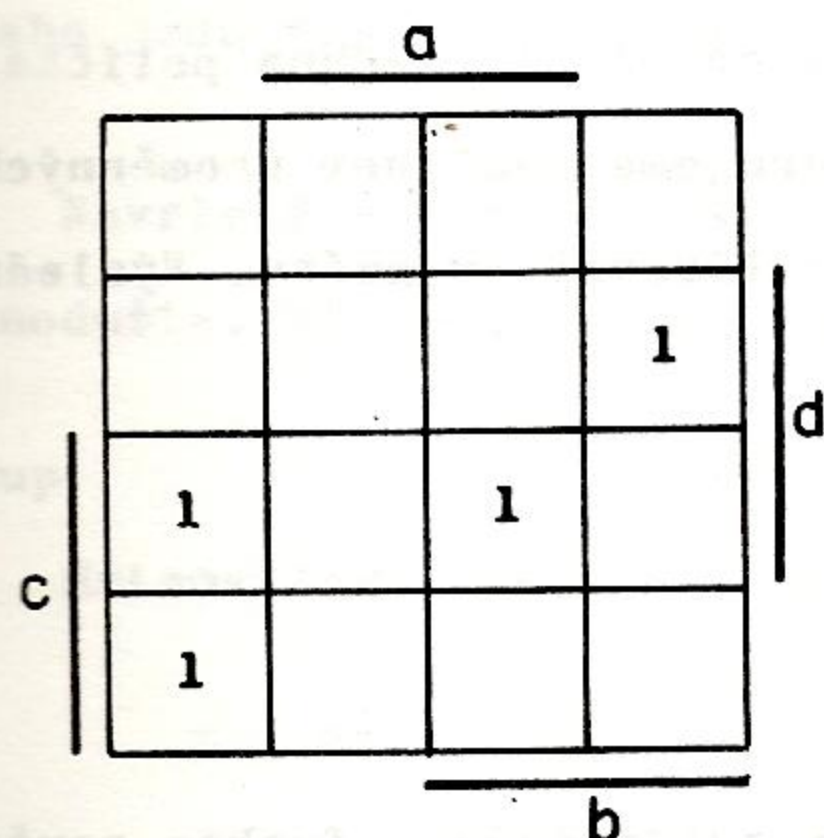
Políčka, ve kterých je výstupní proměnná  $y = 0$ , se nezaplňují.



### Příklad 2:

Sestavte Karnaughovu mapu k funkci, dané algebraickým výrazem

$$y = abcd + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}bc$$



obr. 63

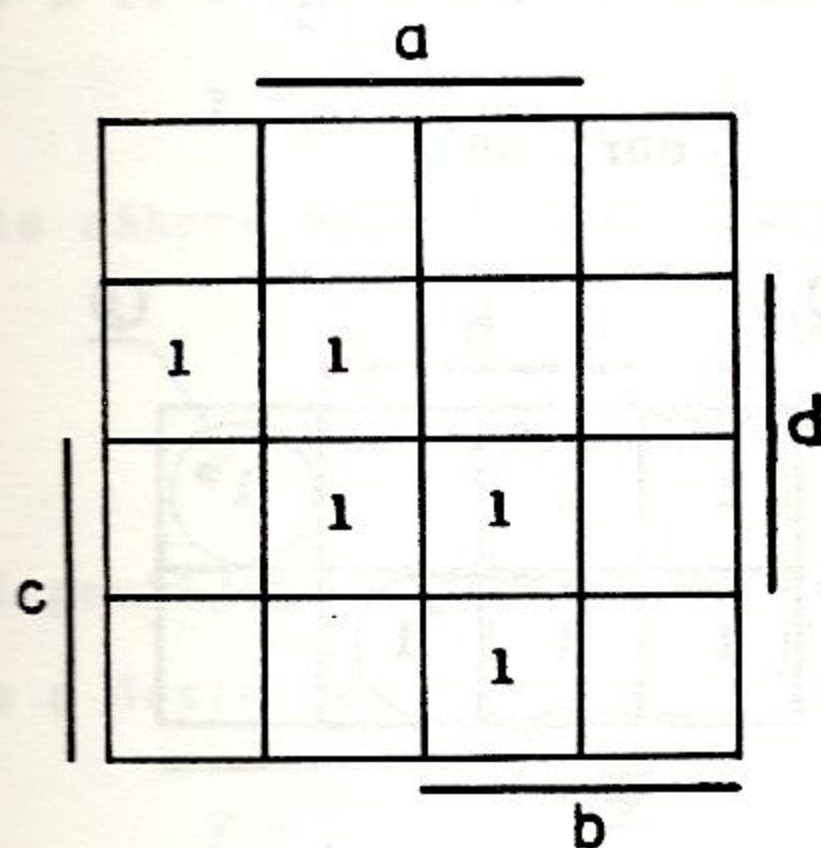
Jedná se o funkci čtyř vstupních proměnných, Karnaughova mapa bude tudíž čtvercová s 16 políčky. Logická funkce se skládá ze součtu tří součinnových členů. Pro každý tento člen vyznačíme v mapě hodnotu logické funkce. Karnaughova mapa pro daný případ je znázorněna na obr. 63.

### 7.1.2. Minimalizace logických funkcí pomocí Karnaughových map

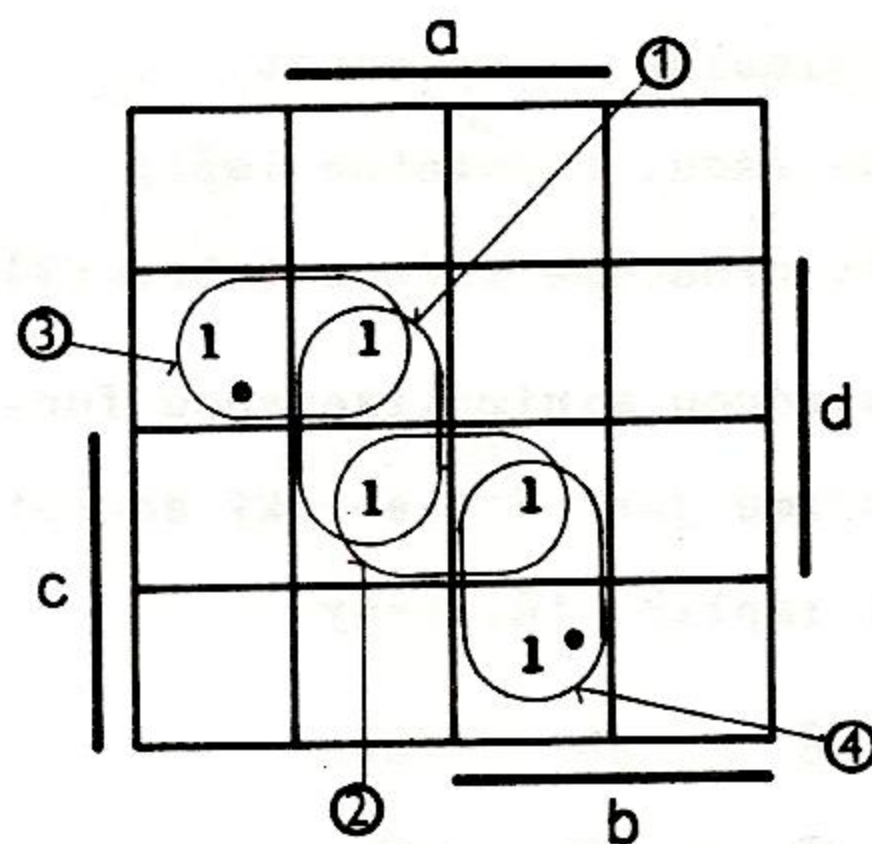
#### Příklad 1:

Zjednodušte funkci, danou algebraickým výrazem

$$y = \bar{a}\bar{b}cd + a\bar{b}d + acd + abcd$$



obr. 64



obr. 65

Postup:

Nejdříve k dané funkci sestavíme Karnaughovu mapu (viz obr. 64). Poté seskupíme  $2^k$  sousedních políček mapy, v nichž má logická funkce hodnotu 1 a uzavřeme je čarami, vytvoříme tedy implikanty k-řádu (k musí být co největší a vždy rovno



mocnině 2). V našem případě dostaneme 4 implikanty 1. řádu (viz obr. 65). Nyní vyhledáme podstatné implikanty, které označíme tečkou. Pro úplnost uvádíme, že podstatný implikant je takový, u kterého alespoň jedno políčko není zahrnuto do jiných implikantů.

Minimalizovanou funkci vyjádříme jako Booleovský součet všech podstatných implikantů a dalších implikantů tak, aby v nich byla obsažena všechna políčka s vepsanou hodnotou logické funkce 1. Implikanty vyjadřujeme součinem proměnných, které se nemění při pohybu mezi políčky implikantu v libovolném směru. Výsledná minimalizovaná funkce bude tedy

$$y = \bar{b}\bar{c}d + abc + a\bar{b}d$$

nebo

$$y = \bar{b}\bar{c}d + abc + acd$$

Jak je vidět, nezáleží na tom, zda k vyjádření zjednodušené funkce použijeme implikant č. 1, nebo č. 2. Výsledná minimalizovaná funkce může být tudíž vyjádřena dvěma způsoby.

#### Příklad 2:

Zjednodušte logickou funkci, jejíž Karnaughova mapa je na obr. 66.

Postup:

V tomto případě je možné vytvořit maximálně 3 implikanty co nejvyššího řádu. Podstatné implikanty opět označíme tečkou (obr. 67).

Výslednou minimalizovanou funkci vyjádříme jako Booleovský součet všech tří implikantů, tedy

$$y = \bar{c} + ab + \bar{a}\bar{b}c$$

①          ②          ③

	b			
	1	1		1
a	1	1	1	
	c			

obr. 66

	b			
	① 1 •	1		③ 1 •
a	1	② 1	• 1	
	c			

obr. 67



Příklad 1:

Nakreslete řádkové schéma podle následujících podmínek: Cívka stykače S je pod napětím, když je zapnuto relé A a vypnuto relé B, nebo jsou vypnuta relé A i B, nebo jsou vypnuta relé A i B a zapnuto relé D, nebo jsou zapnuta relé B i C i D.

Navržené schéma popište rovnicí, kterou na základě zákonů Booleovy algebry zjednodušte. Minimalizovaný vztah převedte opět na řádkové schéma.

Postup:

Matematický zápis slovní formulace je

$$y = a\bar{b} + \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{b}d + bcd$$

odpovídající řádkové schéma je znázorněno na obr. 68.

Při minimalizaci pomocí zákonů algebry logiky postupujeme tak, že se snažíme vytýkat vždy co největší skupiny proměnných. V našem případě tedy vytkneme ze 2. a 3. členu součin  $\bar{a}\bar{b}$ . Pak dostaneme

$$y = \bar{a}\bar{b}(1 + d) + a\bar{b} + bcd$$

Protože  $(1 + d) = 1$ , bude

$$y = \bar{a}\bar{b} + a\bar{b} + bcd$$

Dále z 1. a 2. členu vytkneme  $\bar{b}$

$$y = \bar{b}(\bar{a} + a) + bcd$$

Podle zákona vyloučeného třetího je

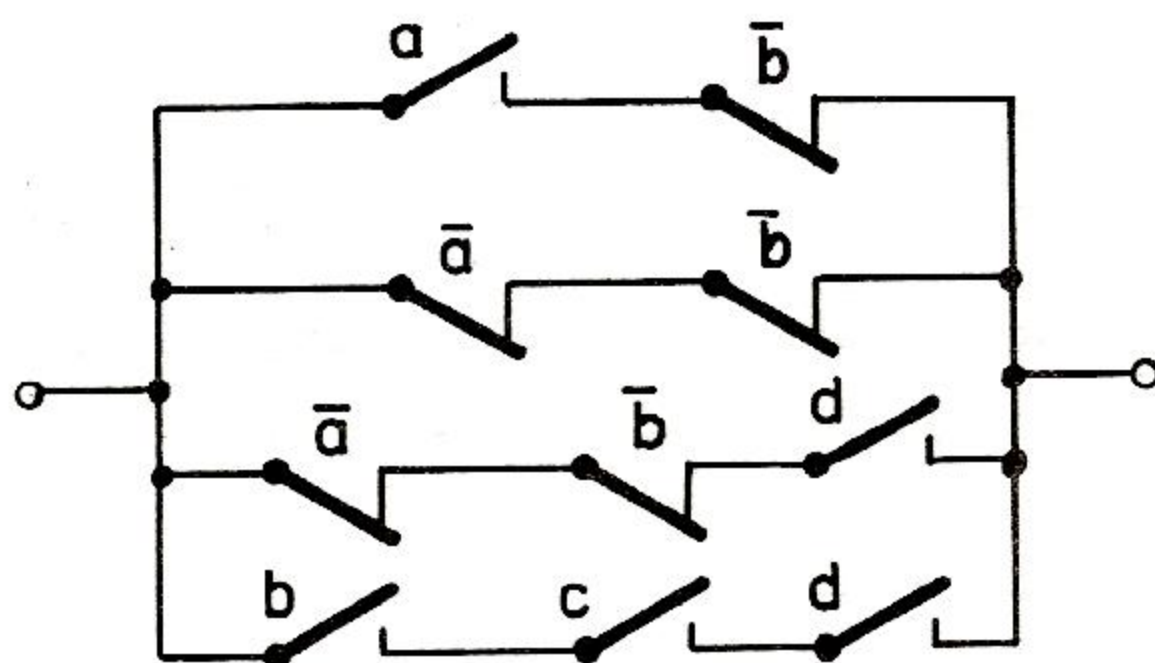
$$\bar{a} + a = 1, \text{ takže}$$

$$y = \bar{b} + bcd$$

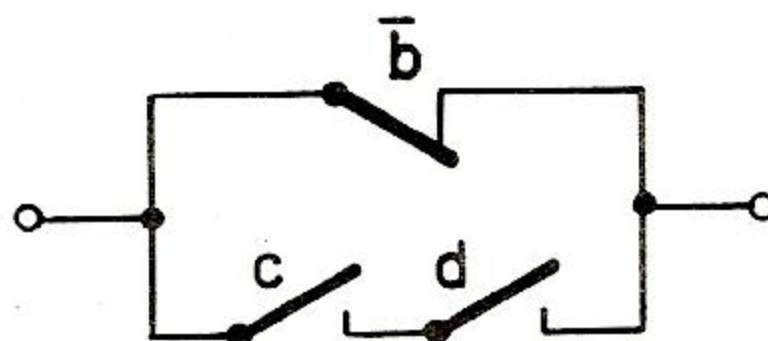
Nyní použijeme zákona absorpce negace a dostaneme výsledný vztah

$$y = \bar{b} + cd,$$

který převedeme na řádkové schéma (viz obr. 69).



obr. 68



obr. 69



## Příklad 2:

Napište matematický výraz schématu na obr. 70 a na základě zákonů algebry logiky proveďte jeho zjednodušení. Výsledné schéma nakreslete.

Postup:

Matematický výraz znázorněné logické funkce je

$$y = abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c$$

Nyní z prvních dvou členů vytkneme součin  $ab$

$$y = ab(c + \bar{c}) + a\bar{b}c$$

Protože  $c + \bar{c} = 1$ , upravíme na

$$y = ab + a\bar{b}c$$

Dále z obou členů vytkneme  $a$

$$y = a(b + \bar{b}c)$$

Výraz v závorce se zjednoduší podle zákona absorpce negace a výsledná minimalizovaná funkce je

$$y = a(b + c)$$

Ke stejnému výsledku dospějeme, rozšíříme-li původní výraz o člen  $abc$ , který se v něm již vyskytuje. Tím se logická funkce nezmění. Rozšířený výraz je

$$y = abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c + abc$$

Z prvních dvou členů vytkneme součin  $ab$ , z třetího a čtvrtého členu vytkneme součin  $ac$ , tedy

$$y = ab(c + \bar{c}) + ac(\bar{b} + b)$$

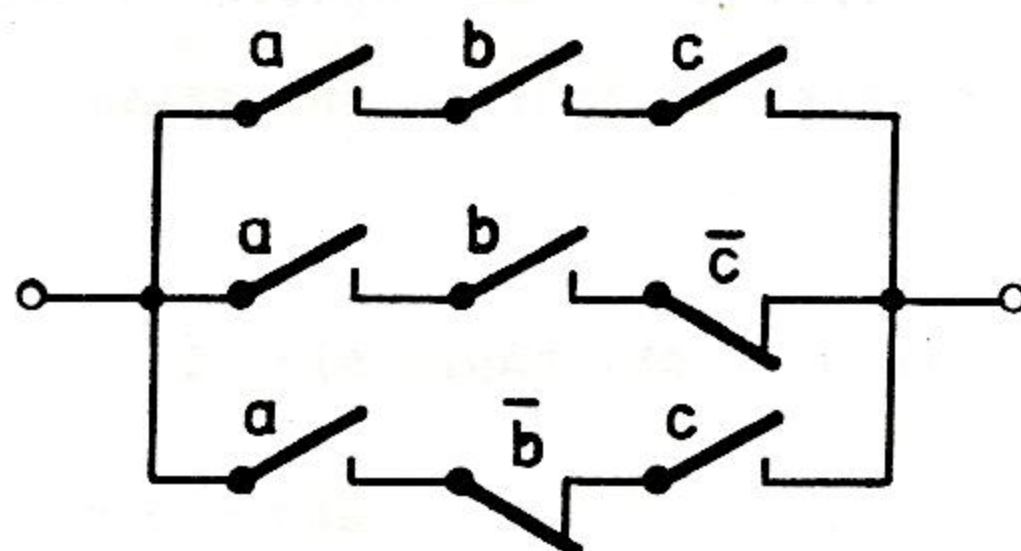
Podle zákona vyloučeného třetího

jsou výrazy v závorkách rovny 1, takže

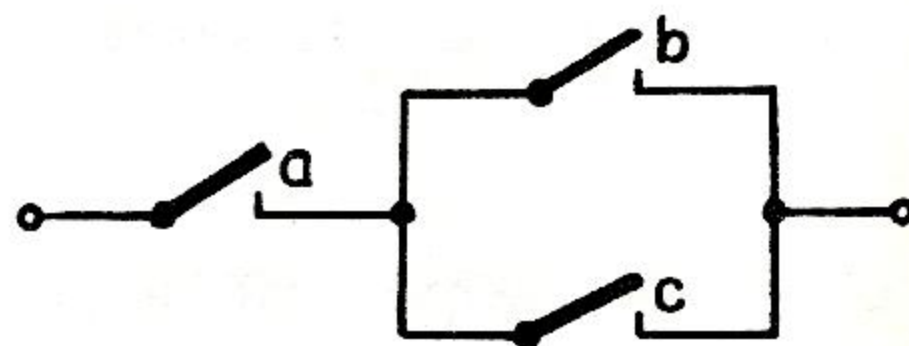
$$y = ab + ac$$

Nyní vytkneme z obou členů  $a$ , čímž dostaneme výslednou minimalizovanou funkci, stejnou jako při předcházejícím postupu. Graficky je znázorněna na obr. 71.

$$y = a(b + c)$$



obr. 70



obr. 71



### 7.3. Operátorový přenos

#### Příklad 1:

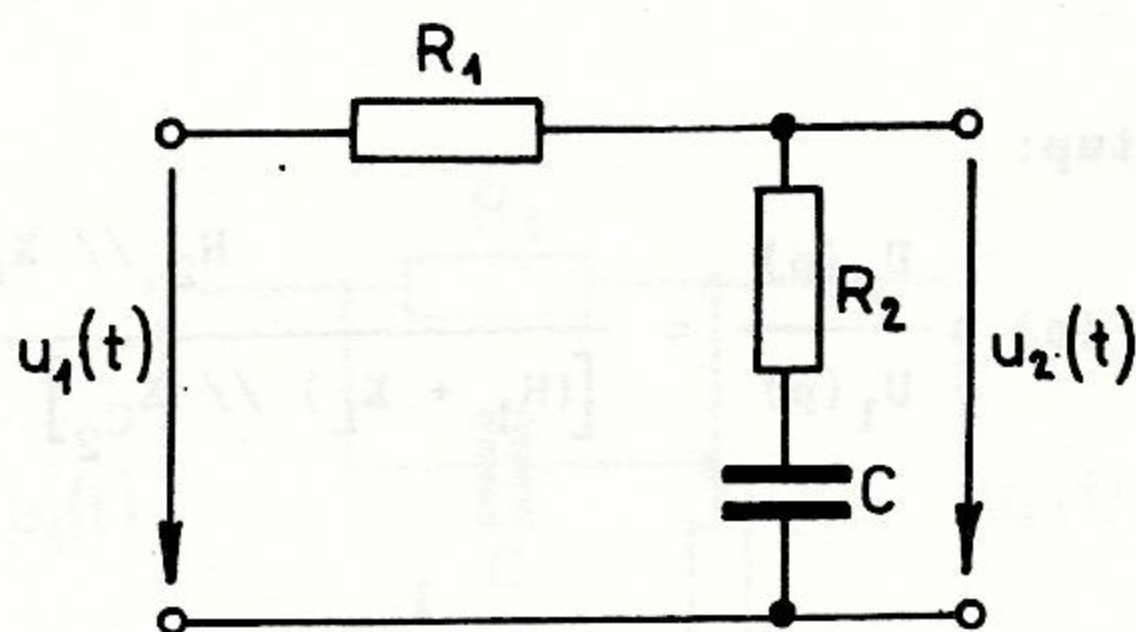
Určete operátorový přenos pasivního integračního korekčního členu, znázor-  
něného na obr. 72.

Postup:

Operátorový přenos je defino-  
ván jako poměr obrazu výstupní ve-  
ličiny k obrazu vstupní veličiny  
za nulových počátečních podmínek.

Pro napěťový přenos tedy platí

$$F(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$$



obr. 72

Ze vztahu pro dělič napětí dostaneme

$$F(p) = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}$$

kde  $Z_1(p) = R_1$                        $Z_2(p) = R_2 + \frac{1}{pC}$

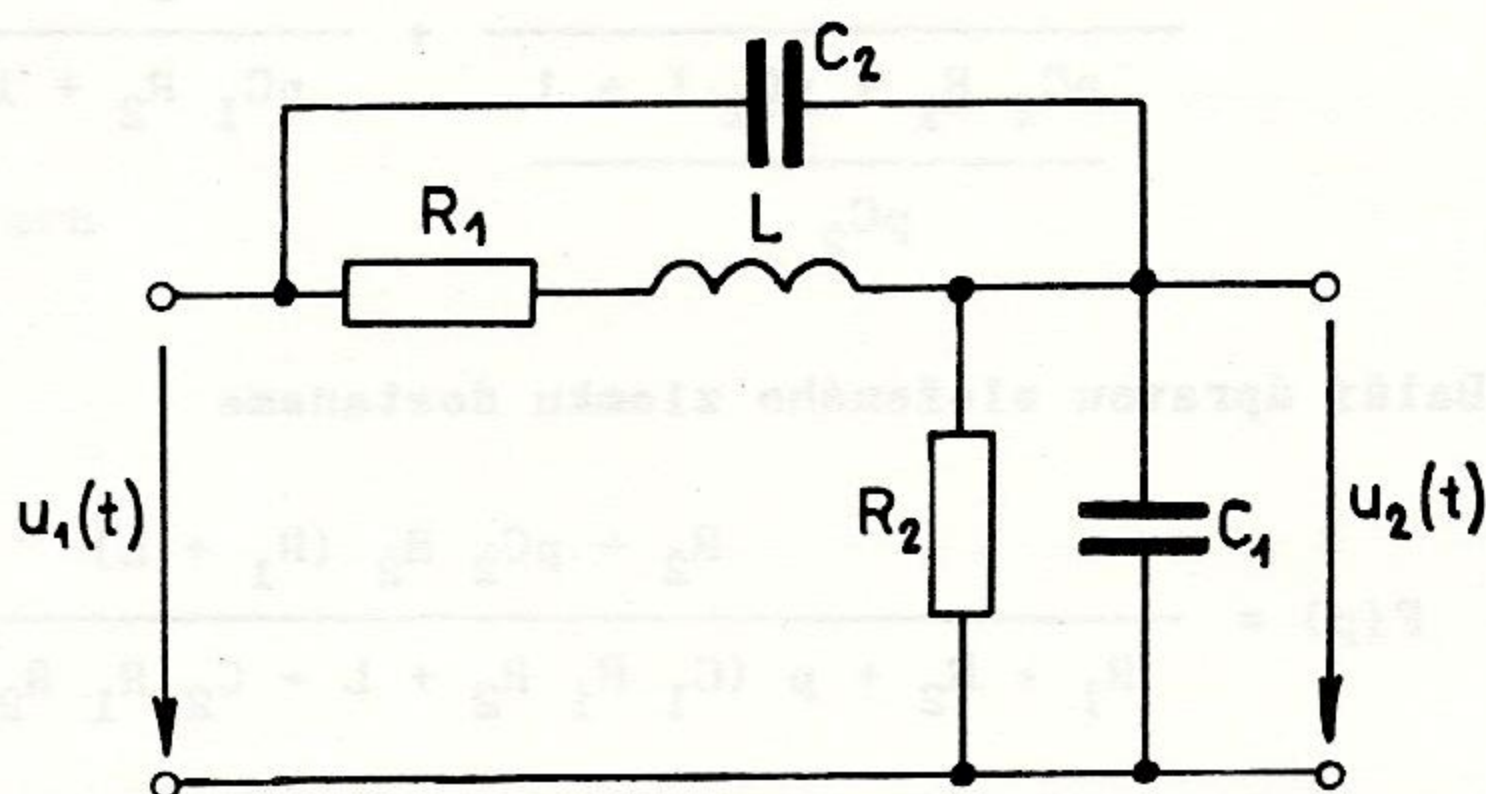
Pak tedy bude

$$F(p) = \frac{R_2 + \frac{1}{pC}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{\frac{pCR_2 + 1}{pC}}{\frac{pCR_1 + pCR_2 + 1}{pC}} = \frac{1 + pCR_2}{1 + pC(R_1 + R_2)}$$

$$F(p) = \frac{1 + T_2 p}{1 + T_1 p}$$

kde  $T_1 = C(R_1 + R_2)$

$T_2 = C R_2$



obr. 73



### Příklad 2:

Určete operátorový přenos členu, znázorněného na obr. 73. Jsou dány tyto hodnoty obvodových prvků:

$$\begin{array}{lll} R_1 = 10 \, \Omega & C_1 = 10 \, \text{pF} & L = 10 \, \text{mH} \\ R_2 = 50 \, \Omega & C_2 = 200 \, \text{pF} & \end{array}$$

Postup:

$$F(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{R_2 // X_{C_1}}{\left[ (R_1 + X_L) // X_{C_2} \right] + \left[ R_2 // X_{C_1} \right]}$$

$$F(p) = \frac{\frac{R_2 \frac{1}{pC_1}}{\frac{1}{pC_2} (R_1 + pL) + \frac{R_2 \frac{1}{pC_1}}{\frac{1}{pC_2} + R_1 + pL}}}{\frac{1}{pC_2} + R_1 + pL} + \frac{\frac{R_2 \frac{1}{pC_1}}{R_2 + \frac{1}{pC_1}}}{\frac{1}{pC_2} + R_1 + pL}$$

$$F(p) = \frac{\frac{\frac{R_2}{pC_1}}{\frac{pC_1 R_2 + 1}{pC_1}}}{\frac{R_1 + pL}{pC_2}} + \frac{\frac{R_2}{pC_1 R_2 + 1}}{\frac{pC_2 R_1 + pC_2 L + 1}{pC_2}}$$

Další úpravou složeného zlomku dostaneme

$$F(p) = \frac{R_2 + pC_2 R_2 (R_1 + L)}{R_1 + R_2 + p(C_1 R_1 R_2 + L + C_2 R_1 R_2 + C_2 R_2 L) + p^2 C_1 R_2 L}$$

Po dosazení číselných hodnot bude přenos

$$F(p) = \frac{50 + p \cdot 10^{-7}}{60 + 0,01 p + p^2 \cdot 5 \cdot 10^{-12}}$$

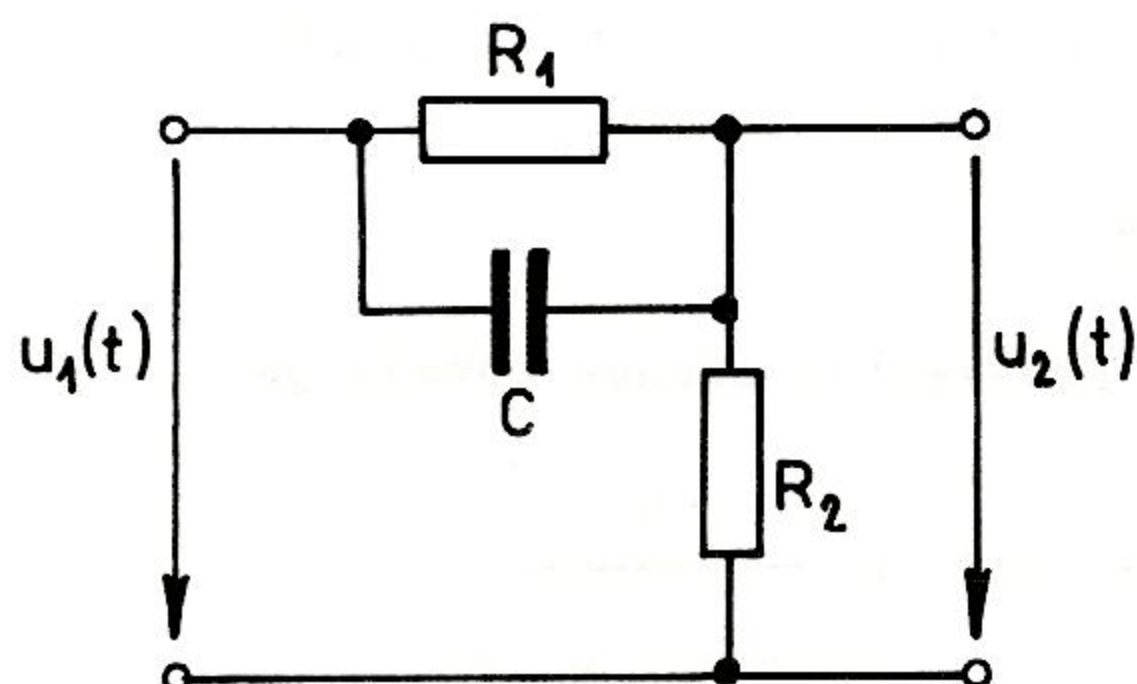
### Příklad 3:

Určete operátorový přenos pasivního derivačního korekčního členu, znázorněného na obr. 74.

Postup:

$$F(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$$

$$F(p) = \frac{R_2}{\frac{R_1}{\frac{1}{pC}} + R_2}$$



obr. 74

Po úpravě dostaneme

$$F(p) = \frac{R_2 + p C R_1 R_2}{R_1 + R_2 + p C R_1 R_2}$$

Dosadíme-li za  $T_1 = R_1 C$

$$T_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

dostaneme výsledný přenos ve tvaru

$$F(p) = K \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p}$$



## 7.4. Frekvenční charakteristiky

### 7.4.1. Frekvenční charakteristiky v komplexní rovině

#### Příklad 1:

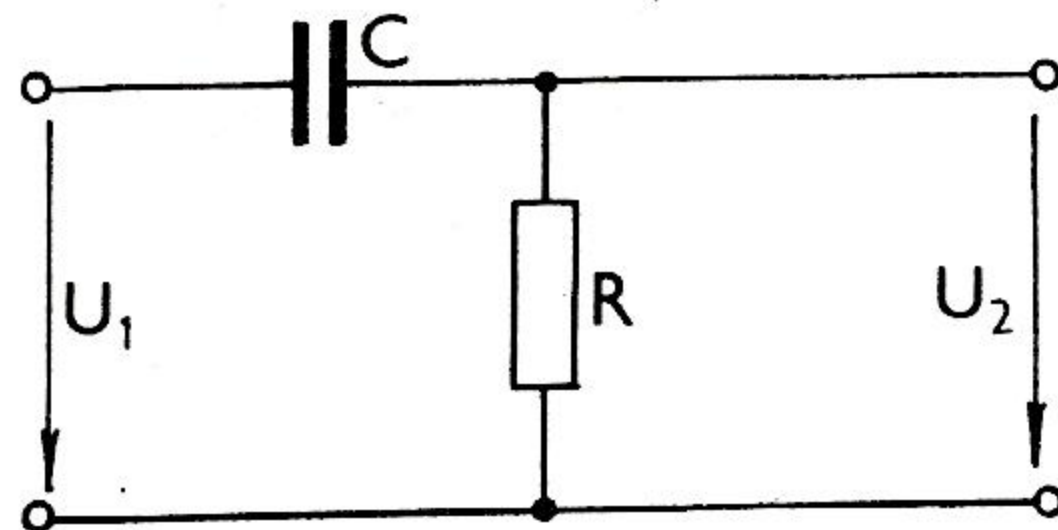
Sestrojte frekvenční charakteristiku v komplexní rovině RC členu, znázorňného na obr. 75.

$$R = 1 \text{ k}\Omega \quad C = 10 \text{ }\mu\text{F}$$

Postup:

Frekvenční přenos obvodu je

$$F(j\omega) = \frac{R}{\frac{1}{j\omega C} + R}$$



obr. 75

Po úpravě dostaneme

$$F(j\omega) = \frac{j\omega C R}{1 + j\omega C R}$$

Po dosazení za  $R \cdot C = T$  bude frekvenční přenos ve tvaru

$$F(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T}$$

Nyní tento přenos rozdělíme na reálnou a imaginární část tak, že celý zlomek vynásobíme číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli, tedy

$$F(j\omega) = \frac{j\omega T (1 - j\omega T)}{(1 + j\omega T) (1 - j\omega T)}$$

Další úpravou získáme

$$F(j\omega) = \frac{\omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2} + j \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

Po dosazení číselných hodnot za  $R$  a  $C$  má přenos tvar

$$F(j\omega) = \frac{10^{-4} \omega^2}{1 + 10^{-4} \omega^2} + j \frac{10^{-2} \omega}{1 + 10^{-4} \omega^2} = P(\omega) + j Q(\omega) \quad (18)$$

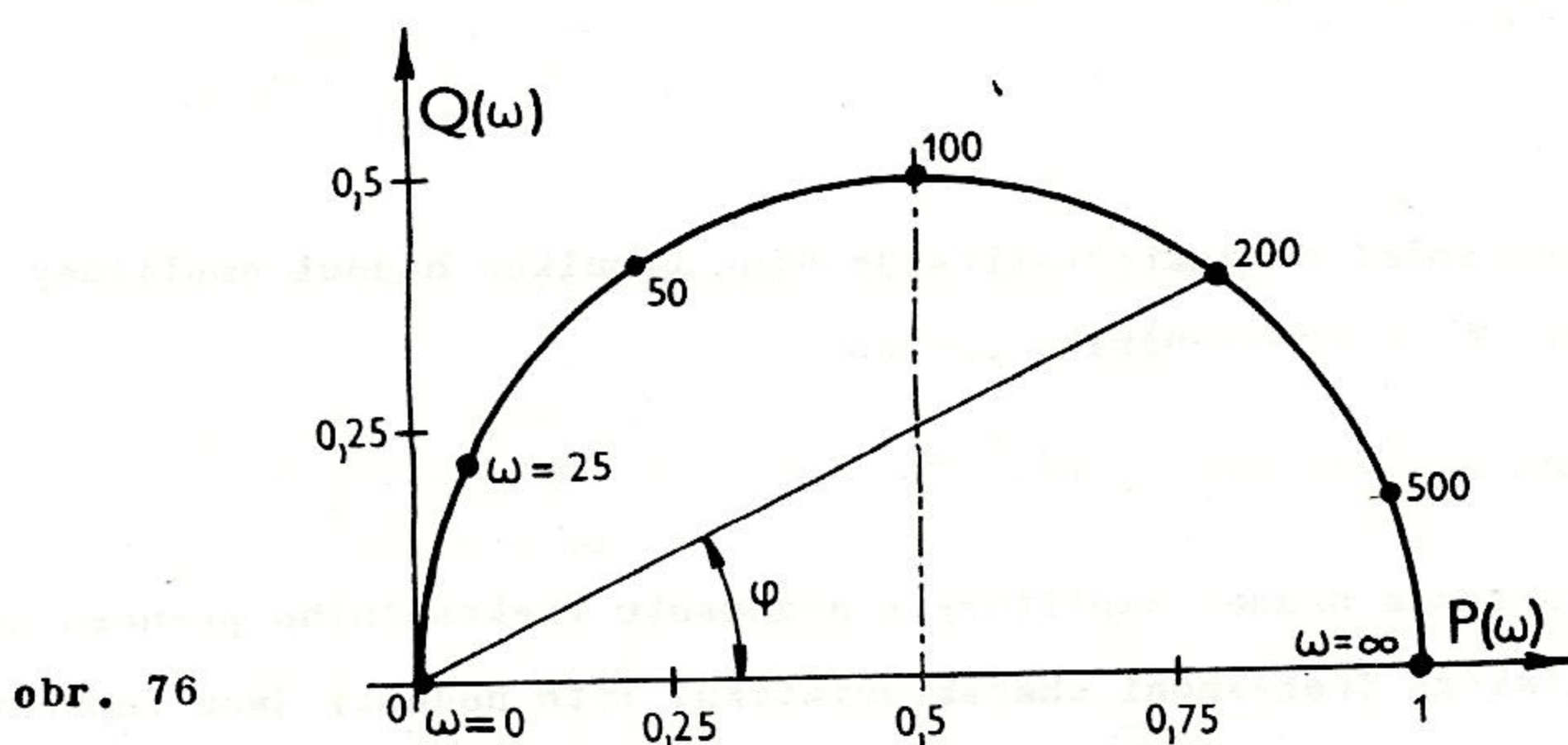


Dosazujeme-li do tohoto vztahu za  $\omega$  různé hodnoty od 0 do  $\infty$ , získáme řadu dvojic hodnot  $P(\omega)$  a  $Q(\omega)$ , ze kterých můžeme sestavit frekvenční charakteristiku daného obvodu.

Vzhledem k tomu, že z výsledného vztahu pro výpočet přenosu  $F(j\omega)$  plyne

$$P^2(\omega) + Q^2(\omega) = P(\omega),$$

můžeme frekvenční charakteristiku též sestavit jako polokružnici v 1. kvadrantu komplexní roviny se středem v bodě  $(0,5 ; j0)$  a poloměrem 0,5 (viz obr. 76).



Ze vztahu (18) je zřejmé, že pro  $\omega = 0$  bude

$$F(j\omega) = 0 + j0$$

a pro  $\omega = \infty$

$$F(j\omega) = 1 + j0$$

Body, odpovídající těmto frekvencím, a také některým kmitočtům uvnitř tohoto intervalu, jsou vyznačeny na obr. 76. Frekvence, příslušné mezilehlým bodům křivky, se naleznou následujícím způsobem:

Protože argument komplexního přenosu (18) je roven

$$\varphi = \arg F(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

čili

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\omega T} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{100}{\omega}, \quad (19)$$

protíná paprsek, vedený z počátku souřadnic pod úhlem  $\varphi$  ke kladné reálné ose, frekvenční charakteristiku v bodě, ve kterém se určuje frekvence  $\omega$  ze vztahu (19). Jeden takový paprsek je znázorněn na obr. 76.



### Příklad 2:

Regulační obvod má frekvenční přenos otevřené smyčky

$$F(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$$

Sestrojte frekvenční charakteristiku tohoto obvodu pro

$$K = 400$$

$$T_1 = 80 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$T_2 = 12 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

Postup:

Frekvenční charakteristika je dána tabulkou hodnot amplitudy  $|F(j\omega)|$  a argumentu  $\varphi(\omega)$  frekvenčního přenosu

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

Vynesením hodnot amplitudy a argumentu frekvenčního přenosu do komplexní roviny získáme frekvenční charakteristiku. Tyto hodnoty jsou zapsány v tab. 2.

$\omega (\text{s}^{-1})$	0	2	5	10	20	50	100	300	$\infty$
$ F(j\omega)  (-)$	$\infty$	196	74	31	10,3	1,66	0,319	0,015	0
$\varphi(\omega) (^{\circ})$	-90	-100	-115	-135	-162	-197	-223	-252	-270

tab. 2

### Příklad 3:

Sestrojte frekvenční charakteristiku členu s přenosem typu

$$F(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$$

pro  $K = 8$

$$T_1 = 80 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$T_2 = 12 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$



Frekvenční přenos daného členu je

$$F(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$$

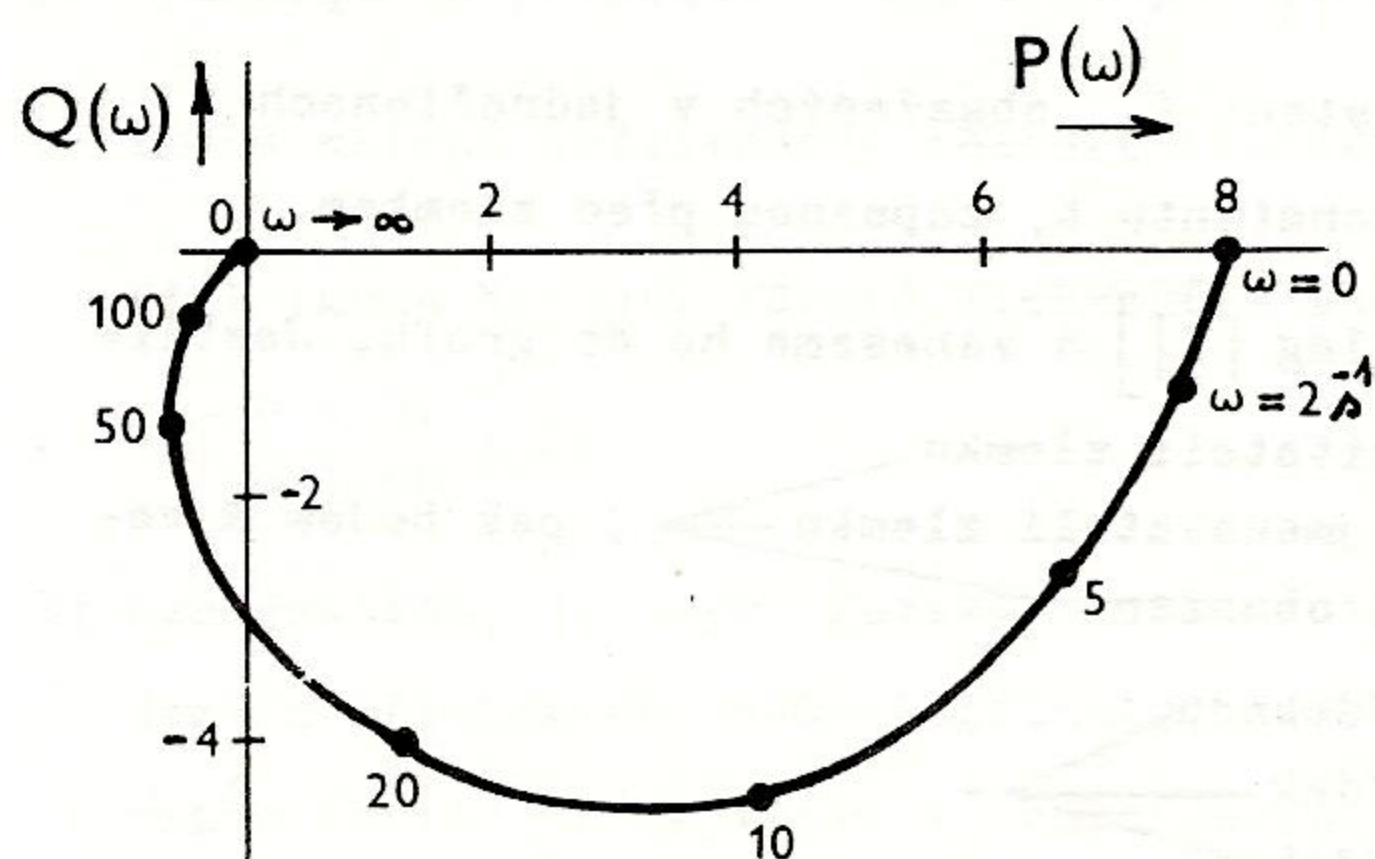
$$F(j\omega) = \frac{K(1 - j\omega T_1)(1 - j\omega T_2)}{(1 + j\omega T_1)(1 - j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 - j\omega T_2)}$$

po úpravě bude

$$F(j\omega) = \frac{K(1 - \omega^2 T_1 T_2)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)} - j \frac{\omega K(T_1 + T_2)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}$$

Po dosazení číselných hodnot bude mít frekvenční přenos tvar

$$F(j\omega) = \frac{8 - 7,6 \cdot 10^{-3} \omega^2}{1 + 6,54 \cdot 10^{-3} \omega^2 + 8,96 \cdot 10^{-7} \omega^4} - j \frac{0,74 \omega}{1 + 6,54 \cdot 10^{-3} \omega^2 + 8,96 \cdot 10^{-7} \omega^4}$$



obr. 77

Nyní za  $\omega$  dosadíme různé hodnoty, čímž získáme řadu dvojic  $P(\omega)$  a  $Q(\omega)$ , z nichž sestojíme frekvenční charakteristiku obvodu v komplexní rovině. Tato charakteristika je uvedena na obr. 77.

#### 7.4.2. Logaritmické frekvenční charakteristiky

Logaritmickou frekvenční charakteristiku dostaneme logaritmováním frekvenčního přenosu

$$F(j\omega) = \frac{X_2}{X_1} = |F(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

Po zlogaritmování dostaneme

$$\ln F(j\omega) = \ln |F(j\omega)| + j\varphi(\omega)$$



Vynášíme zvláště logaritmus amplitudy frekvenčního přenosu, který nazýváme amplitudovou logaritmickou frekvenční charakteristikou, a zvláště fázi jako fázovou logaritmickou frekvenční charakteristiku.

a) Amplitudová logaritmická frekvenční charakteristika

Na svislé ose je u amplitudové charakteristiky vynášen přenos v decibelech, na vodorovné ose  $\log \omega$ , tedy

$$|F(j\omega)| \text{ [dB]}_{\text{lin.}} = f(\omega)_{\text{log.}}$$

Amplitudovou logaritmickou frekvenční charakteristiku můžeme sestrojit buď bod po bodu, přímým dosazováním do vztahu

$$|F(j\omega)| \text{ [dB]} = 20 \log |F(j\omega)|,$$

nebo pomocí asymptot následujícím postupem:

- 1) Frekvenční přenos vyjádříme ve tvaru zlomku tak, aby v čitateli i ve jmenovateli byly součiny jednočlenů typu  $(j\omega T_j)^n$  a dvojčlenů typu  $(1 \pm j\omega T_i)^n$ .
- 2) Násobící konstanty zlomku, včetně konstant  $T_j$  obsažených v jednočlenech  $(j\omega T_j)^n$ , se potom sloučí v jedinou konstantu  $K$ , zapsanou před zlomkem.
- 3) Určíme bod  $A \equiv [1; \text{signatura } K \cdot 20 \log |K|]$  a zaneseme ho do grafu. Jestliže jednočlen  $(j\omega)^n$ 
  - je obsažen v čitateli zlomku
  - je obsažen ve jmenovateli zlomku
  - ve zlomku není obsažen
, pak bodem  $A$  vedeme přímku se sklonem
  - $n \cdot 20 \text{ dB/dekádu}$
  - $-n \cdot 20 \text{ dB/dek}$
  - $0 \text{ dB/dek}$
- 4) Z dvojčlenů  $(1 \pm j\omega T_i)^n$  určíme kmitočty lomů charakteristiky  $\omega_i = \frac{1}{T_i}$  a zaneseme je do grafu.
- 5) Další průběh amplitudové logaritmické frekvenční charakteristiky sestává z přímkových úseků, které mění sklon v jednotlivých kmitočtech lomů  $\omega_i$ . Je-li příslušné  $\omega_i$  stanoveno výpočtem z dvojčlenu  $(1 \pm j\omega T_i)^n$ , který se nachází
  - v čitateli
  - ve jmenovateli
zlomku, pak v tomto bodě o souřadnici  $\omega_i$  se mění sklon charakteristiky o
  - $n \cdot 20 \text{ dB/dek}$
  - $-n \cdot 20 \text{ dB/dek}$
oproti dosavadnímu sklonu.
- 6) Lze dokázat, že chyba amplitudové logaritmické frekvenční charakteristiky, sestrojené z asymptot, vůči skutečnému průběhu této charakteristiky je největší



v bodech lomu a činí zde přibližně  $\pm 3$  dB. Při sestrovování přesného průběhu se provede oprava na skutečný průběh v okolí kmitočtů lomů.

## b) Fázová logaritmická frekvenční charakteristika

Na svislé ose fázové logaritmické frekvenční charakteristiky je vynesena fáze ve stupních, na vodorovné ose  $\log \omega$ , tedy

$$\arg F(j\omega) [^\circ]_{\text{lin.}} = f(\omega)_{\text{log.}}$$

Fázovou charakteristiku můžeme sestrojit buď bod po bodu, přímým dosazováním do vztahu

$$\arg F(j\omega) = \frac{\text{Im } F(j\omega)}{\text{Re } F(j\omega)},$$

nebo pomocí přímkových úseků konstantní hodnoty (odvozených z asymptot amplitudové logaritmické frekvenční charakteristiky) následujícím postupem:

1) Vycházíme z předem sestrojené amplitudové frekvenční charakteristiky.

2) Změně sklonu amplitudové charakteristiky v bodě lomu  $\alpha \begin{matrix} n \cdot 20 \text{ dB/dek} \\ -n \cdot 20 \text{ dB/dek} \end{matrix} \text{ odpovídá}$

vídá změna hodnoty fázové frekvenční charakteristiky

$$\alpha \begin{matrix} n \cdot 90^\circ \\ -n \cdot 90^\circ \end{matrix}.$$

3) Lze dokázat, že chyba fázové frekvenční logaritmické charakteristiky, sestrojené z přímkových úseků konstantní hodnoty vůči skutečnému průběhu této charakteristiky je největší v bodech nespojitosti a činí zde přibližně  $\pm 45^\circ$ .  
Při sestrovování přesného průběhu se provede oprava v okolí bodů nespojitosti.

### Příklad 1:

Určete průběh amplitudové a fázové logaritmické frekvenční charakteristiky, je-li přenos daného obvodu vyjádřen vztahem

$$F(p) = \frac{40}{1 + 0,12 p + 0,002 p^2} \quad (20)$$

Postup:

Sestrojení logaritmických frekvenčních charakteristik vyžaduje uvést daný přenos na tvar



$$F(p) = \frac{K}{(1 \pm T_1 p)(1 \pm T_2 p)}$$

Jmenovatele přenosu (20) je třeba rozložit na dva kořenové činitele. Hle dané kořeny jmenovatele určíme řešením kvadratické rovnice

$$1 + 0,12 p + 0,002 p^2 = 0,$$

která se nazývá charakteristická rovnice daného obvodu. Její kořeny jsou

$$p_1 = -10$$

$$p_2 = -50$$

Protože platí  $T_1 = \frac{1}{p_1} = -0,1 \text{ s}$

$$T_2 = \frac{1}{p_2} = -0,02 \text{ s},$$

má operátorový přenos tvar

$$F(p) = \frac{40}{(1 + 0,1 p)(1 + 0,02 p)}$$

Formální záměnou  $p \rightarrow j\omega$  dostaneme frekvenční přenos daného obvodu

$$F(j\omega) = \frac{40}{(1 + j 0,1 \omega)(1 + j 0,02 \omega)}$$

Odtud sestrojíme logaritmickou amplitudovou charakteristiku obvodu, která má tvar

$$L(\omega) = |F(j\omega)| = 20 \cdot \log \left| \frac{40}{(1 + j 0,1 \omega)(1 + j 0,02 \omega)} \right|$$

Dosazováním různých hodnot za  $\omega$  dostaneme křivku, znázorněnou čárkovaně na obr. 78 a).

Asymptoty amplitudové charakteristiky sestrojíme z bodu A o souřadnicích

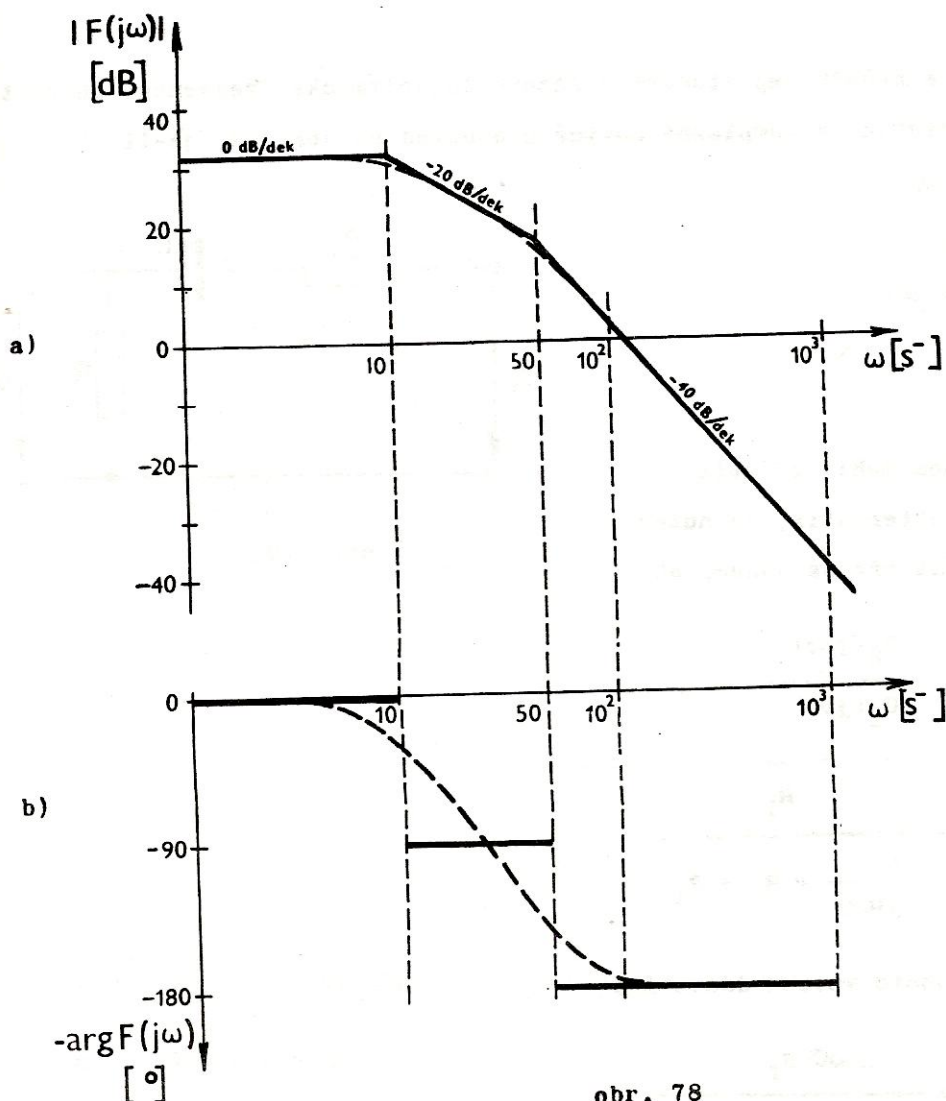
$$A \equiv [1; +20 \cdot \log 40]$$

$$A \equiv [1; 32]$$

a z kmitočtů lomů  $\omega_1$  a  $\omega_2$ .

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 10 \text{ s}^{-1} \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2} = 50 \text{ s}^{-1}$$





obr. 78

Asymptotická amplitudová charakteristika se skládá ze tří částí: vodorovné, procházející bodem A, části se sklonem  $-20 \text{ dB/dek}$  a části se sklonem  $-40 \text{ dB/dek}$ . Tato charakteristika je znázorněna plnou čarou na obr. 78 a).

Fázová charakteristika má tvar

$$\varphi(\omega) = \arg F(j\omega) = -\arctg 0,1\omega - \arctg 0,02\omega$$

Z tohoto vztahu lze sestavit fázovou charakteristiku bod po bodu (čárková křivka v obr. 78 b)), nebo můžeme sestavit její aproximaci z přímkových úseků konstantní hodnoty (plná čára v obr. 78 b)), podle dříve sestavené charakteristiky amplitudové.



### Příklad 2:

Určete průběh amplitudové a fázové logaritmické frekvenční charakteristiky a charakteristiku v komplexní rovině pro obvod na obr. 79, je-li

$$R_1 = 10^3 \Omega$$

$$R = 200 \Omega$$

$$C = 0,4 \mu F$$

Postup:

Abychom mohli zjistit průběh charakteristik, je nutné nejprve určit přenos daného obvodu:

$$F(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}$$

$$F(j\omega) = \frac{R_1}{\frac{1}{j\omega C} + R + R_1}$$

Po úpravě tohoto vztahu dostáváme

$$F(j\omega) = \frac{j\omega C R_1}{1 + j\omega C (R_1 + R)}$$

a po dosazení číselných hodnot bude mít frekvenční přenos tvar

$$F(j\omega) = 0,4 \cdot 10^{-3} \frac{j\omega}{1 + j\omega \cdot 0,48 \cdot 10^{-3}}$$

Určení asymptot amplitudové frekvenční charakteristiky:

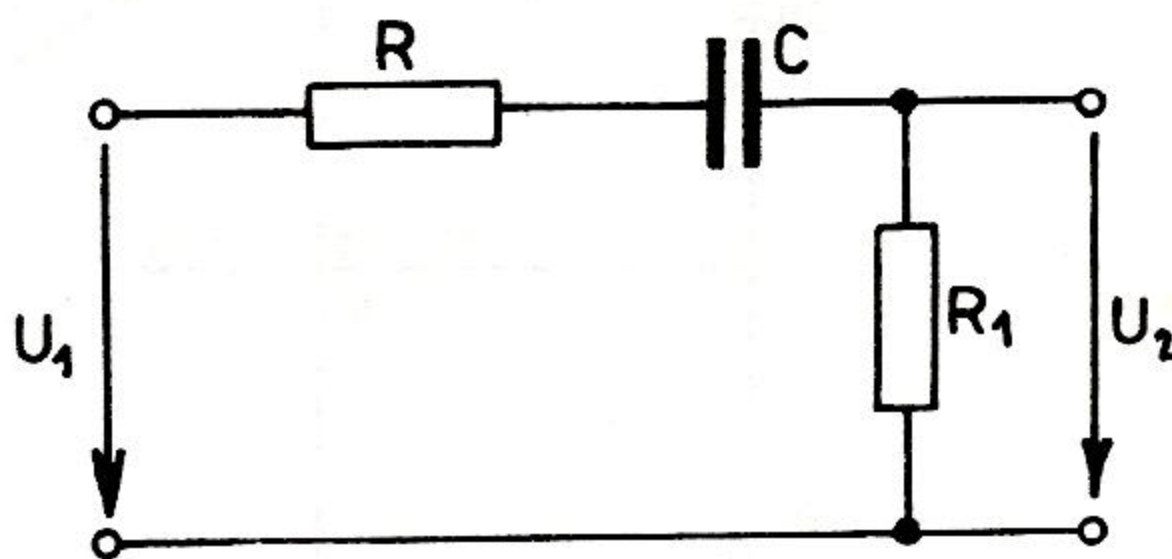
Tato charakteristika prochází bodem A o souřadnicích

$$A \approx [1; 20 \cdot \log 0,4 \cdot 10^{-3}] \quad \text{tedy} \quad A \approx [1; -68]$$

kmitočet lomu

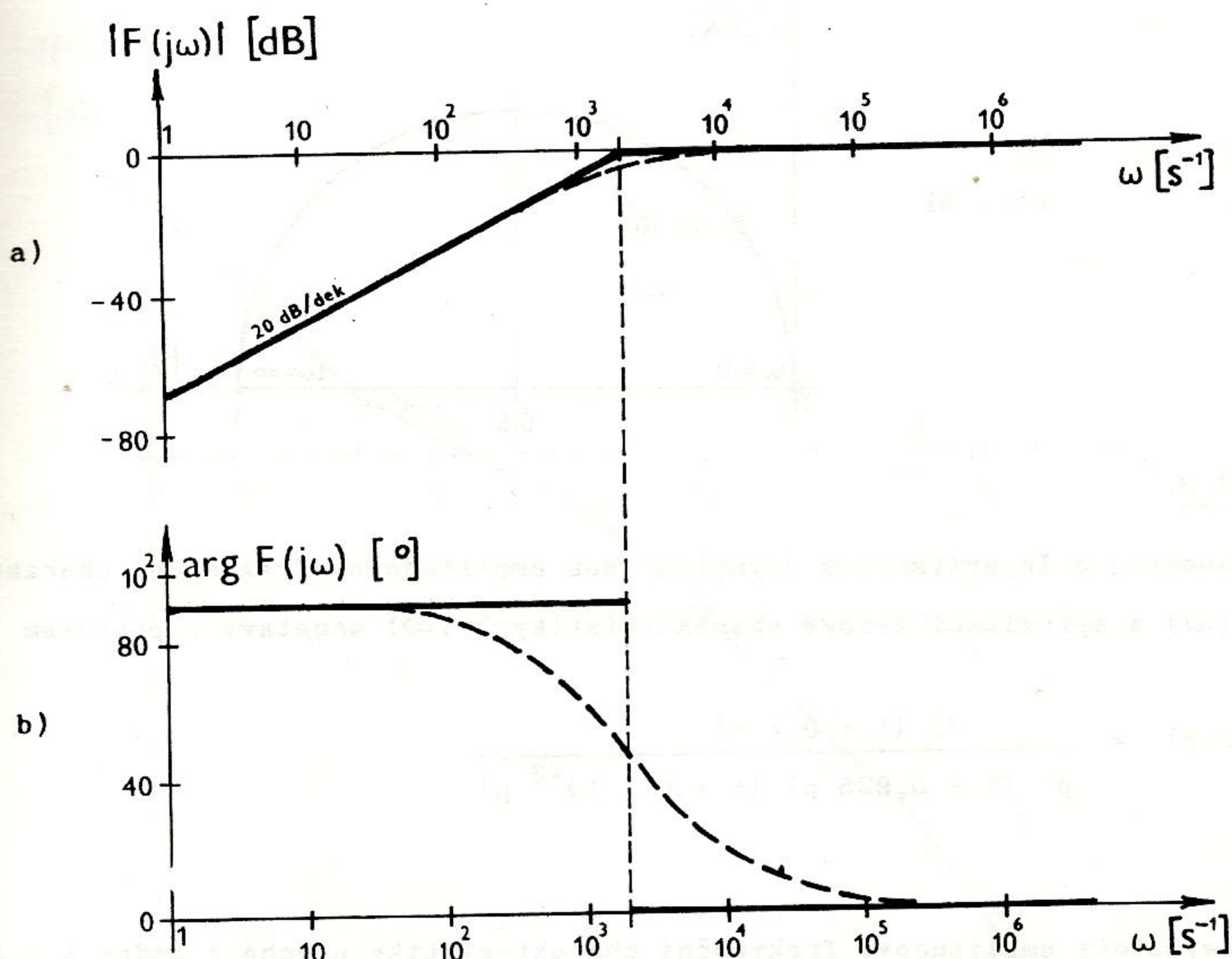
$$\omega = \frac{1}{T} = 2083 \text{ s}^{-1}$$

Asymptoty amplitudové frekvenční charakteristiky jsou znázorněny plnou čarou na obr. 80 a).



obr. 79





obr. 80

#### Určení aproximace fázové frekvenční charakteristiky:

Aproximaci fázové frekvenční charakteristiky sestojíme z přímkových úseků konstantní hodnoty z předem nakreslených asymptot amplitudové charakteristiky tak, že změně sklonu amplitudové charakteristiky o  $\pm 20$  dB/dek odpovídá změna průběhu fázové charakteristiky o  $\pm 90^\circ$  (viz plná čára v obr. 80 b)).

V obr. 80 jsou skutečné průběhy obou charakteristik znázorněny čárkovaně.

#### Určení frekvenční charakteristiky v komplexní rovině:

pro  $\omega = 0$  je  $F(j\omega) = 0$

pro  $\omega = \infty$  je  $F(j\omega) = 1$

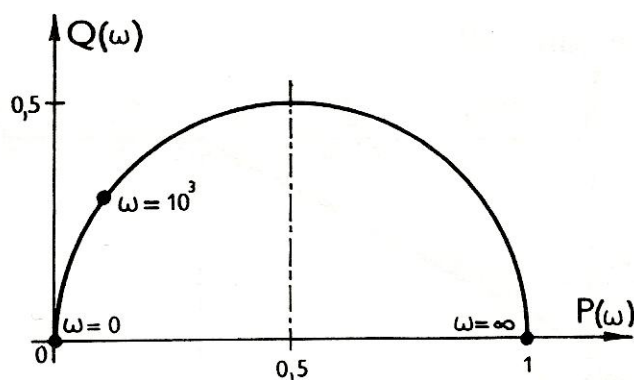
pro  $\omega = 10^3$ : 
$$F(j\omega) = \frac{0,4 j}{1 + 0,4 \cdot 1,2 j} = \frac{0,4 (1 - j 0,48)}{1 + 0,48^2} = \frac{0,4 j + 0,19}{1,23}$$

$$F(j\omega) = 0,156 + j 0,325$$

Kmitočtová charakteristika v komplexní rovině je na obr. 81.



obr. 81



### Příklad 3:

Sestrojte logaritmickou asymptotickou amplitudovou frekvenční charakteristiku  $L(\omega)$  a aproximaci fázové charakteristiky  $\gamma(\omega)$  soustavy s přenosem

$$F(p) = \frac{75 (1 + 0,2 p)}{p^2 (1 + 0,025 p) (1 + 6 \cdot 10^{-3} p)}$$

### Postup:

Asymptoty amplitudové frekvenční charakteristiky prochází bodem A o souřadnicích

$$A \equiv [1; +20 \cdot \log 75]$$

$$A \equiv [1; 37,5]$$

Kmitočty lomů jsou

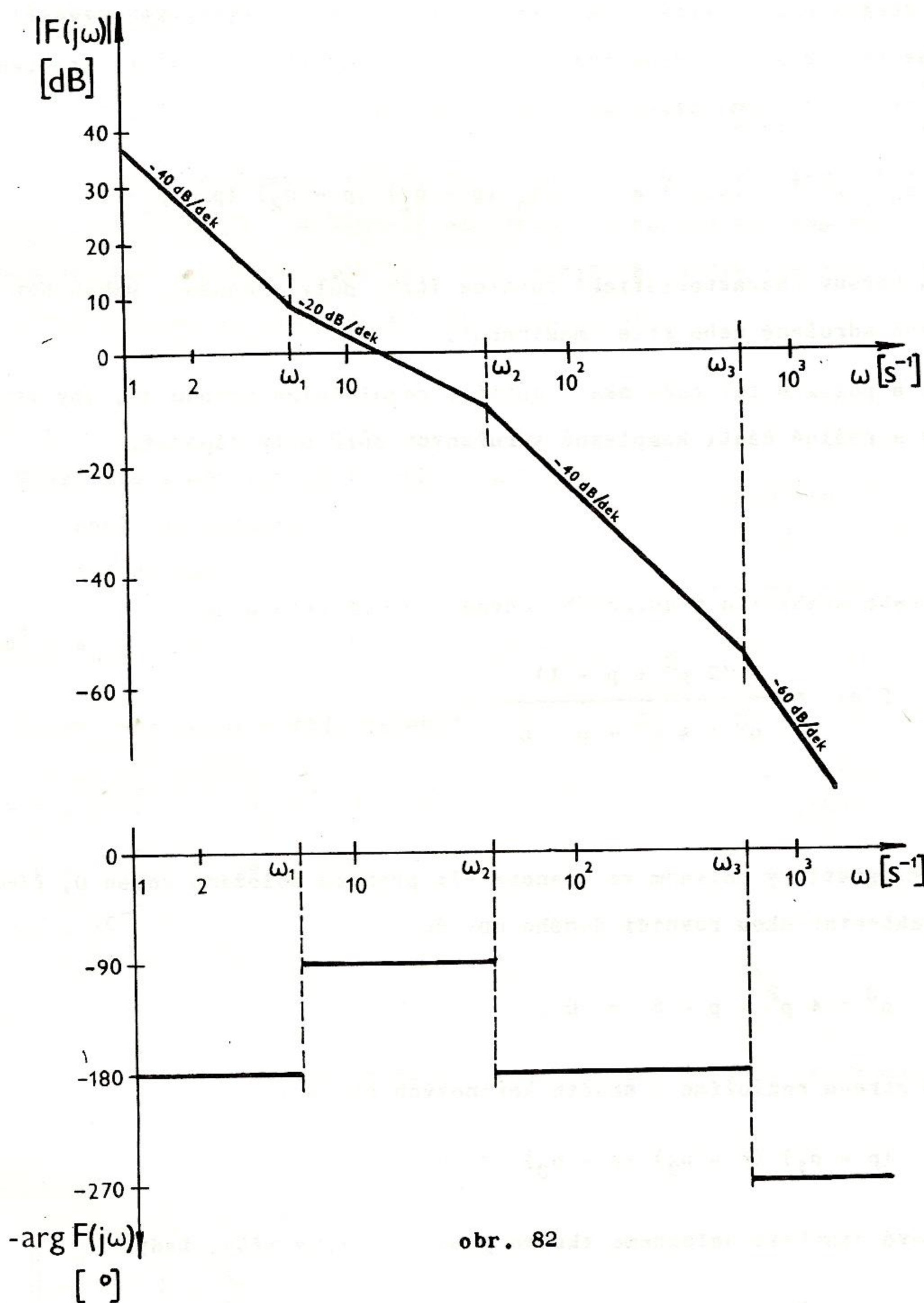
$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,025} = 40 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_3 = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{6 \cdot 10^{-3}} = 167 \text{ s}^{-1}$$

Aproximace frekvenčních charakteristik v logaritmických souřadnicích je na obr. 82.





obr. 82

## 7.5. Vyšetřování stability regulačních obvodů

### 7.5.1. Výpočet kořenů charakteristické rovnice

Charakteristická rovnice uzavřeného regulačního obvodu plyne z diferenciální rovnice tohoto obvodu a má tvar

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$



Levá strana charakteristické rovnice (tzv. charakteristický polynom) je rovna jmenovateli operátorového přenosu obvodu. Pro vyšetření stability tento charakteristický polynom rozložíme na součiny kořenových činitelů, tedy

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = a_n (p - p_1) (p - p_2) (p - p_3) \dots (p - p_n)$$

kde  $p_i$  jsou kořeny charakteristické rovnice (tzv. póly přenosu). Mohou být reálné, komplexně sdružené nebo ryze imaginární.

Nutná a postačující podmínka stability regulačního obvodu je, aby všechny reálné póly a reálné části komplexně sdružených pólů byly záporné.

#### Příklad:

Vyšetřete stabilitu regulačního obvodu, jehož přenos je

$$F(p) = \frac{3(2p^2 + p + 1)}{p^3 + 4p^2 + p - 6}$$

#### Postup:

Charakteristický polynom ve jmenovateli přenosu položíme roven 0, čímž dostaneme charakteristickou rovnici daného obvodu

$$p^3 + 4p^2 + p - 6 = 0,$$

jejíž levou stranu rozložíme v součin kořenových činitelů

$$(p - p_1) (p - p_2) (p - p_3) = 0$$

Kořenové činitele nalezneme zkusmo pomocí Viétovy věty, tedy

$$p_1 = -3$$

$$p_2 = 1$$

$$p_3 = -2$$

Charakteristická rovnice bude mít tedy konečný tvar

$$(p + 3) (p - 1) (p + 2) = 0$$

Protože kořen  $p_2$  charakteristické rovnice je kladný (leží v pravé polorovině komplexní roviny), je daný regulační obvod nestabilní.



### 7.5.2. Kritéria stability

Při určování stability regulačního obvodu není nutné znát hodnoty kořenů, stačí znát rozložení kořenů v komplexní rovině  $p$ . Zjistíme-li, že kořeny leží v levé polorovině komplexní roviny, je obvod stabilní; leží-li v pravé polorovině, obvod je nestabilní. Nachází-li se některý z kořenů na imaginární ose, je daný obvod na mezi stability (viz obr. 83). Pravidla, podle kterých se toto rozložení kořenů určuje, se nazývají kritéria stability.

#### Příklad 1:

Vyšetřete stabilitu uzavřeného regulačního obvodu podle Hurwitzova kritéria, jehož charakteristická rovnice je

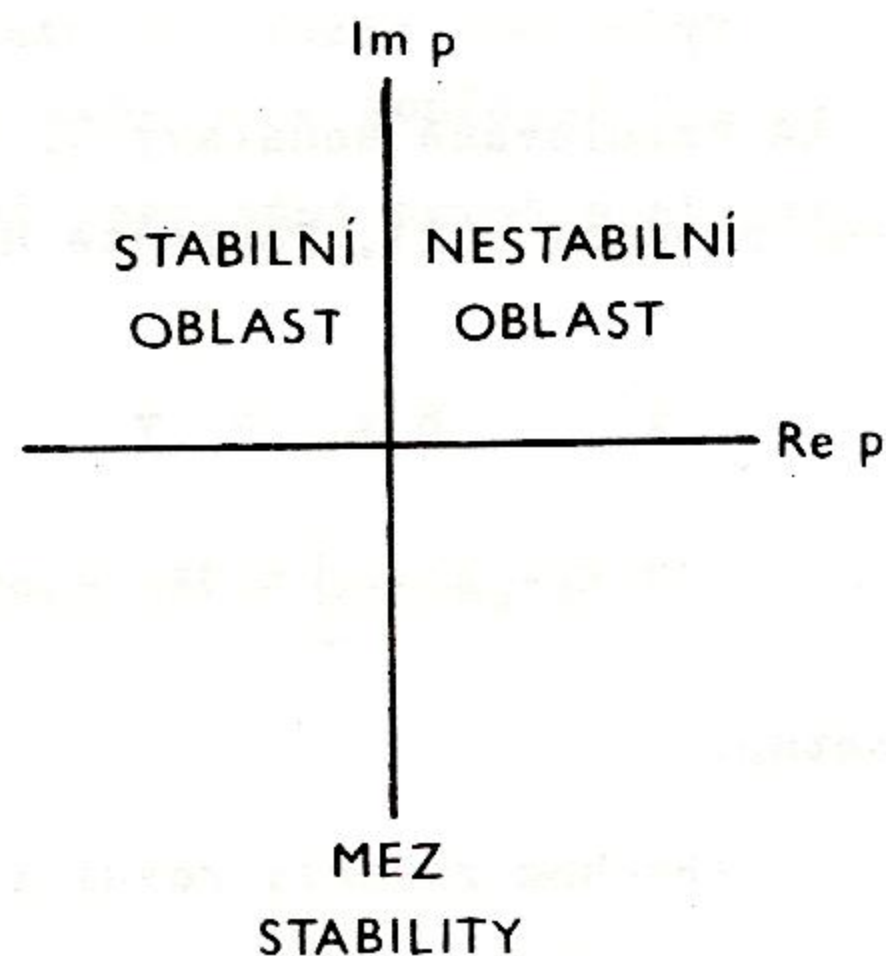
$$a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

Koeficienty této rovnice mají hodnoty

$$a_4 = 2 \cdot 10^{-9} \quad a_1 = 1,3 \cdot 10^{-1}$$

$$a_3 = 2 \cdot 10^{-5} \quad a_0 = 100$$

$$a_2 = 3 \cdot 10^{-3}$$



obr. 83

#### Postup:

Koeficienty charakteristické rovnice zapíšeme do Hurwitzovy matice, která pro obvod 4. řádu má tvar

$$H = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

Nyní vyšetříme, zda subdeterminanty této matice (tzv. Hurwitzovy determinanty) budou kladné:

$$D_1 = a_3 = 2 \cdot 10^{-5} > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 a_2 - a_1 a_4 = 5,07 \cdot 10^{-8} > 0$$



$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_3 a_2 a_1 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 = -32,5 \cdot 10^{-9} < 0$$

Protože subdeterminant  $D_3 < 0$ , je daný regulační obvod nestabilní.

#### Příklad 2:

Vyšetřete stabilitu uzavřeného regulačního obvodu, který se skládá z astatické regulované soustavy 2. řádu, popsané rovnicí (21) a regulátoru PID, popsaného rovnicí (22). Použijte Hurwitzova kritéria.

$$\dot{x} + 6x = y \quad (21)$$

$$2\dot{x} - x - \int x dt = y \quad (22)$$

Postup:

Abychom získali rovnici uzavřeného regulačního obvodu, porovnáme levé strany rovnic (21) a (22):

$$\dot{x} + 6x = 2\dot{x} - x - \int x dt$$

Tuto rovnici zderivujeme, čímž dostaneme hledanou diferenciální rovnici uzavřeného regulačního obvodu:

$$\ddot{x} + 6\dot{x} = 2\dot{x} - x - x$$

a po úpravě bude mít rovnice tvar

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + x + x = 0$$

Charakteristická rovnice daného obvodu je

$$p^3 + 4p^2 + p + 1 = 0$$

Z uvedené charakteristické rovnice sestavíme Hurwitzovu matici

$$H = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ze které vypočítáme Hurwitzovy determinanty:

$$D_1 = 4 > 0$$



$$D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

Protože podle vztahu

$$D_n = a_0 \cdot D_{n-1}$$

platí pro

$$D_3 = a_0 \cdot D_2 = 3 > 0,$$

jsou tedy všechny Hurwitzovy determinanty kladné. Jelikož jsou současně kladné všechny koeficienty charakteristické rovnice, je daný regulační obvod stabilní.

### Příklad 3:

Vyšetřete stabilitu uzavřeného regulačního obvodu podle Michajlova kritéria, je-li charakteristická rovnice daného obvodu

$$0,1 p^3 + 1,4 p^2 + 0,3 p + 1 = 0$$

Postup:

Do rovnice dosadíme za  $p = j\omega$

$$0,1 (j\omega)^3 + 1,4 (j\omega)^2 + 0,3 j\omega + 1 = 0$$

$$-0,1 j\omega^3 - 1,4 \omega^2 + 0,3 j\omega + 1 = 0$$

Tuto rovnici rozdělíme na reálnou část  $P(\omega)$  a imaginární část  $Q(\omega)$ , tedy:

$$P(\omega) = -1,4 \omega^2 + 1 = 0$$

$$Q(\omega) = -0,1 \omega^3 + 0,3\omega = 0$$

Pro hodnoty  $0 \leq \omega \leq \infty$

sestavíme tabulku hodnot  $P(\omega)$  a  $Q(\omega)$ , ze které pak sestojíme Michajlovu křivku  $K$ , kde

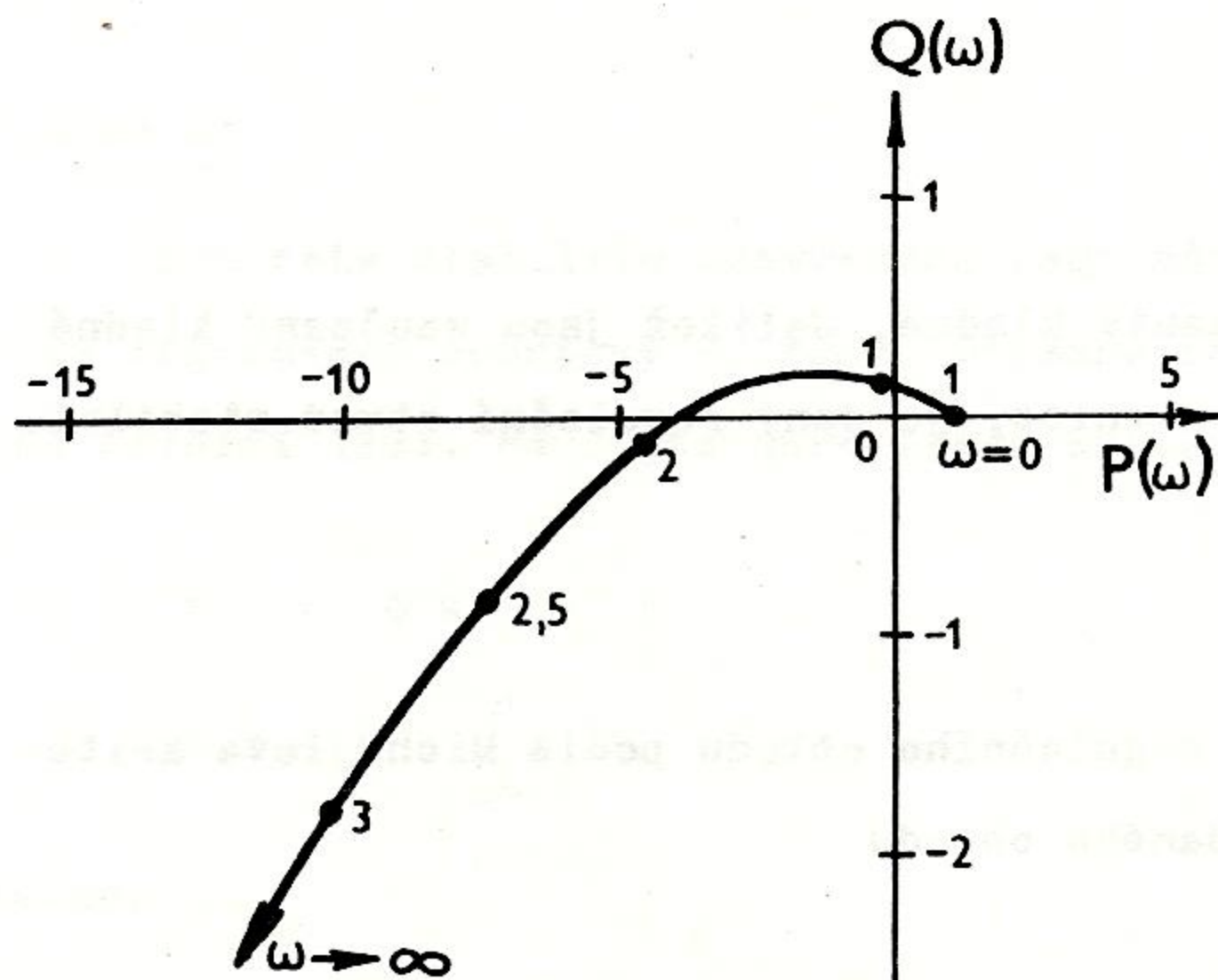
$$K = P(\omega) + j Q(\omega).$$

Michajlova křivka daného regulačního obvodu (obr. 84) je sestrojena podle tab. 3.



$\omega [\text{s}^{-1}]$	0	1	2	2,5	3	4	$\infty$
$P(\omega)$	1	-0,4	-4,6	-7,7	-10,2	-21,4	$\infty$
$Q(\omega)$	0	0,2	-0,2	-0,8	-1,8	-5,2	$\infty$

tab. 3



obr. 84

Daný regulační obvod 3. řádu je stabilní, neboť  $a_0 = 1$  a je tedy splněna podmínka  $a_0 > 0$  a Michajlova křivka K začíná na kladné reálné ose a postupně prochází v kladném směru třemi kvadranty.

#### Příklad 4:

Vyšetřete stabilitu uzavřeného regulačního obvodu pomocí Michajlova kritéria, je-li dán přenos tohoto obvodu

$$F(p) = \frac{0,2 (p + 3) (p + 1) (p + 4)}{3 \cdot 10^{-4} p^5 + 10^{-2} p^4 + 0,12 p^3 + 0,8 p^2 + 4 p + 100}$$

#### Postup:

Vycházíme z charakteristické rovnice obvodu

$$3 \cdot 10^{-4} p^5 + 10^{-2} p^4 + 0,12 p^3 + 0,8 p^2 + 4 p + 100 = 0$$

Další postup je obdobný, jako v předcházejícím příkladě. Za operátor  $p$  dosadíme  $(j\omega)$  a rovnici rozdělíme na reálnou a imaginární část:

$$3 \cdot 10^{-4} (j\omega)^5 + 10^{-2} (j\omega)^4 + 0,12 (j\omega)^3 + 0,8 (j\omega)^2 + 4 j\omega + 100 = 0$$

po úpravě bude mít rovnice tvar

$$3 \cdot 10^{-4} j\omega^5 + 10^{-2} \omega^4 - 0,12 j\omega^3 - 0,8 \omega^2 + 4 j\omega + 100 = 0$$



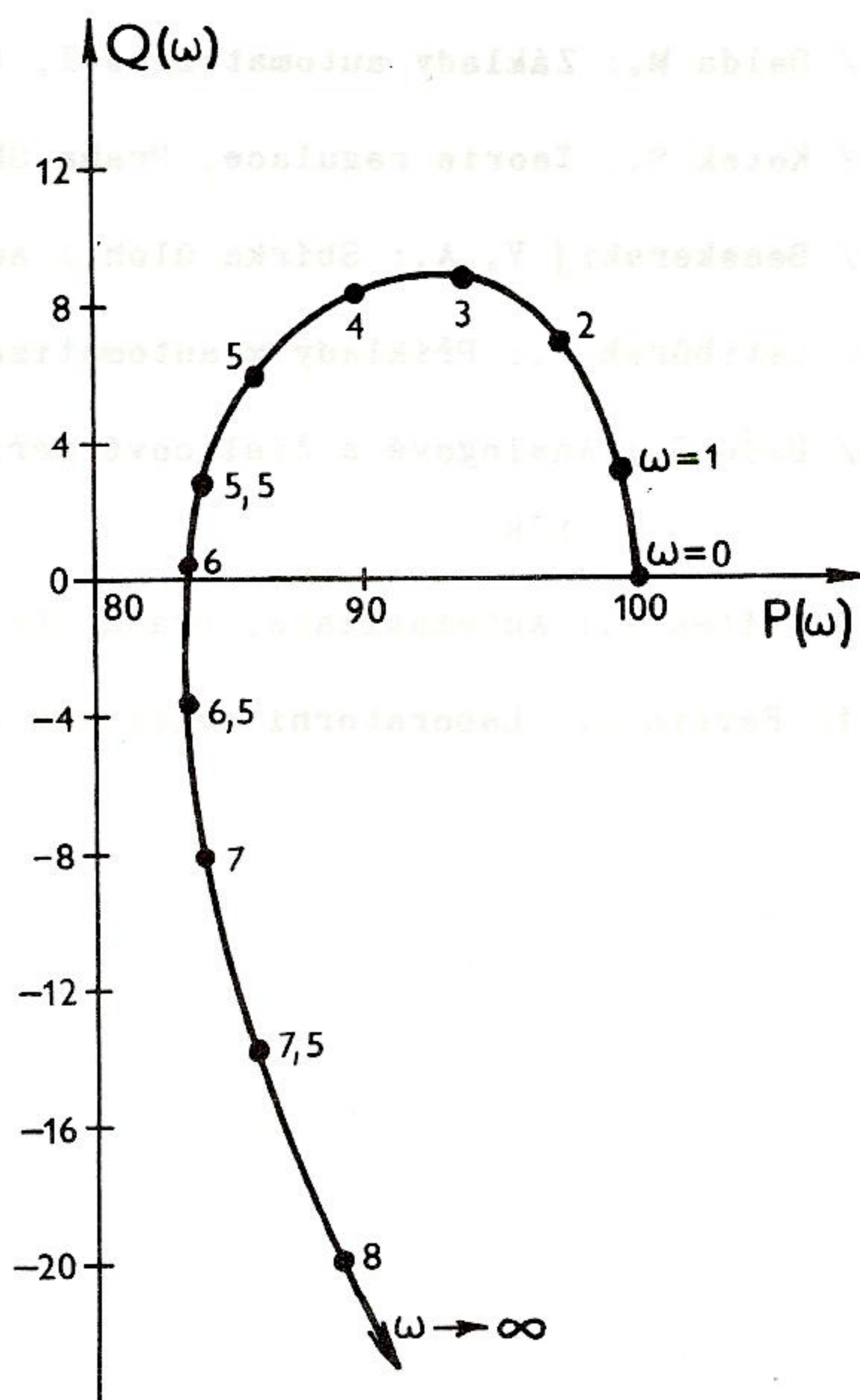
$$P(\omega) = 10^{-2} \omega^4 - 0,8 \omega^2 + 100 = 0$$

$$Q(\omega) = 3 \cdot 10^{-4} \omega^5 - 0,12 \omega^3 + 4\omega = 0$$

Postupným dosazováním za  $\omega$  z intervalu  $(0; \infty)$  dostaneme tabulku hodnot  $P(\omega)$  a  $Q(\omega)$ , viz tab. 4. Z této tabulky sestojíme Michajlovu křivku K, která je znázorněna na obr. 85. Z tohoto obrázku je zřejmé, že daný regulační obvod 5. řádu je nestabilní. Michajlova křivka sice začíná na kladné reálné ose, prochází však pouze 1. a 4. kvadrantem.

$\omega [s^{-1}]$	$P(\omega)$	$Q(\omega)$
0	100	0
1	99,2	3,8
2	97	7
3	93,6	8,8
4	89,7	8,62
4,5	87,9	7,6
5	86	5,9
5,5	84	3,5
6	84	0,4
6,5	84	-3,4
7	84	-8,1
7,5	86,6	-13,5
8	89	-20
$\infty$	$\infty$	$-\infty$

tab. 4



obr. 85